第 3 节 抽象函数问题（★★★☆）

强化训练

1．（2022・成都模拟・★★★）已知函数 $y=f(x)$ 满足 $f(4+x)-f(-x)=0(x\in\mathbf{R})$，且 $f(x)$ 在 $[2,+\infty)$ 上为减函数，则（　　）

（A）$f(\log_2 3)>f(\log_2 5)>f(3)$　（B）$f(\log_2 5)>f(\log_2 3)>f(3)$

（C）$f(\log_2 5)>f(3)>f(\log_2 3)$　（D）$f(\log_2 3)>f(3)>f(\log_2 5)$

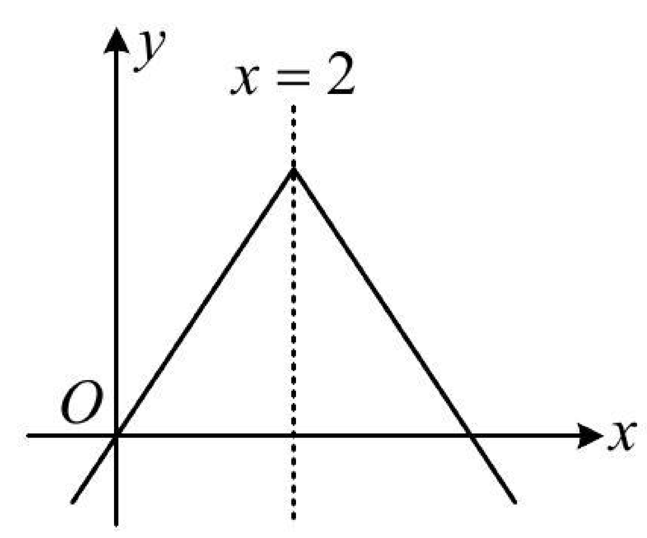
答案：B

解析：$f(4+x)-f(-x)=0\Rightarrow f(x)$ 的图象关于直线 $x=2$ 对称，

结合 $f(x)$ 在 $[2,+\infty)$ 上为减函数可得当自变量与 2 的距离越大时，函数值越小，如图，

而 $|\log_2 3-2|=\left|\log_2\frac{3}{4}\right|=\log_2\frac{4}{3}$，$|\log_2 5-2|=\log_2\frac{5}{4}$，$3-2=1$，

且 $\log_2\frac{5}{4}<\log_2\frac{4}{3}<1$，所以 $f(3)<f(\log_2 3)<f(\log_2 5)$.



2．（2022・黑龙江模拟・★★★）定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数 $f(x)$ 满足 $f(x+8)=f(-4-x)$，且当 $x\in[0,2]$ 时，$f(x)=1-3^x$，则 $f(2022)=$（　　）

（A）-8　（B）-2　（C）2　（D）8

答案：D

解析：$f(x+8)=f(-4-x)\Rightarrow f(x)$ 关于 $x=2$ 对称，$f(x)$ 为奇函数 $\Rightarrow f(x)$ 关于原点对称，所以周期为 8，

故 $f(2022)=f(253\times 8-2)=f(-2)=-f(2)=-(1-3^2)=8$.

3．（★★★）（多选）设 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的偶函数，且对任意的 $x\in\mathbf{R}$，都有 $f(x+2)=f(2-x)$，当 $x\in[0,2]$ 时，$f(x)=(\frac{1}{2})^{2-x}$，则（　　）

（A）$f(x)$ 是周期函数，且周期为 2

（B）$f(x)$ 的最大值是 1，最小值是 $\frac{1}{4}$

（C）$f(x)$ 在 $[2,4]$ 上单调递减，在 $[4,6]$ 上单调递增

（D）当 $x\in[2,4]$ 时，$f(x)=(\frac{1}{2})^{2-x}$

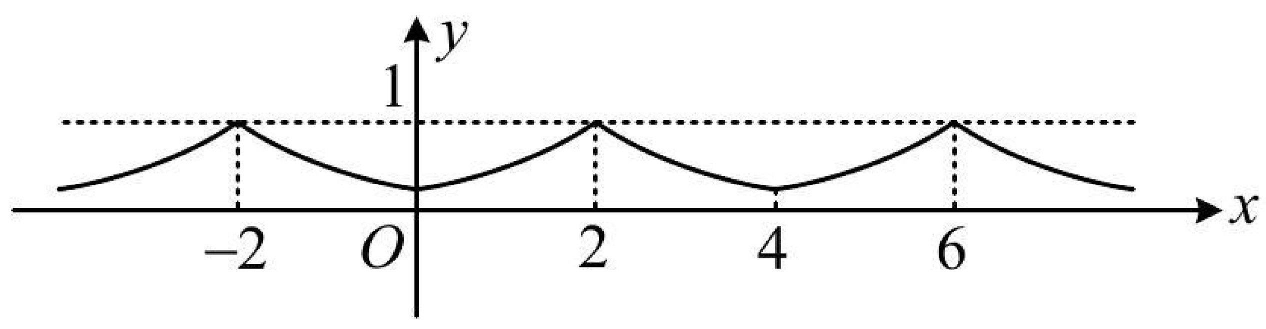
答案：BC

解析：A 项，$f(x)$ 是偶函数 $\Rightarrow f(x)$ 关于 $x=0$ 对称，$f(x+2)=f(2-x)\Rightarrow f(x)$ 关于 $x=2$ 对称，所以 $f(x)$ 是以 4 为周期的周期函数，故 A 项错误；

B 项，当 $x\in[0,2]$ 时，$f(x)=(\frac{1}{2})^{2-x}$，结合 $f(x)$ 是周期为 4 的偶函数可作出 $f(x)$ 的大致图象如图，由图可知 $f(x)_{\min}=f(0)=\frac{1}{4}$，$f(x)_{\max}=f(2)=1$，故 B 项正确；

C 项，由图可知 C 项正确；

D 项，由图可知 $f(x)$ 在 $[2,4]$ 上↘，而 $y=(\frac{1}{2})^{2-x}$ 在 $[2,4]$ 上↗，故 D 项错误.



4.（★★★）已知函数 $f(x)=\ln(\sqrt{x^2+1}-x)+1$，定义域为 $\mathbf{R}$ 的函数 $g(x)$ 满足 $g(-x)+g(x)=2$，若函数 $y=f(x)$ 与 $y=g(x)$ 的图象的交点为 (x_1,y_1)，(x_2,y_2)，⋯，(x_5,y_5)，则 $\sum_{i=1}^{5}(x_i+y_i)=$（　　）

（A）0　（B）5　（C）10　（D）15

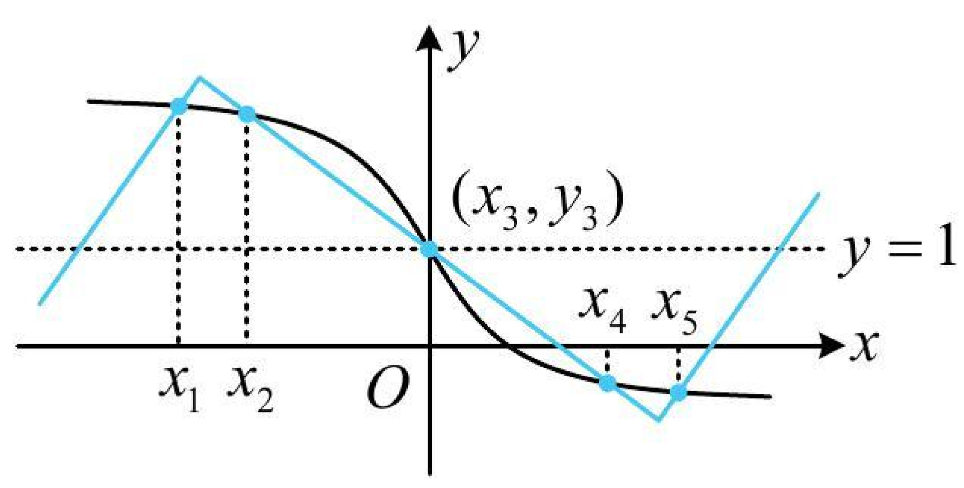
答案：B

解析：$g(x)$ 没给解析式，给的是 $g(-x)+g(x)=2$，只能得出对称性，所以也要研究 $f(x)$ 的对称性，

注意到 $y=\ln(\sqrt{x^2+1}-x)$ 为奇函数，其图象关于原点对称，所以 $f(x)$ 的图象关于点 $(0,1)$ 对称，

又 $g(-x)+g(x)=2$，所以 $g(x)$ 的图象也关于点 $(0,1)$ 对称，故 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的交点关于点 $(0,1)$ 对称，

所以两函数的草图如图，由图可知，$x_1+x_2+\cdots+x_5=0$，$y_1+y_2+\cdots+y_5=5$，所以 $\sum_{i=1}^{5}(x_i+y_i)=5$.



5.（2022•江苏模拟•★★★）偶函数 $f(x)$ 满足 $f(x)=f(2-x)(x\in\mathbf{R})$，当 $x\in[0,1]$ 时，$f(x)=2-2x^2$，则函数 $g(x)=f(x)-2\log_4|x-1|$ 的所有零点之和为（　　）

（A）4　（B）6　（C）8　（D）10

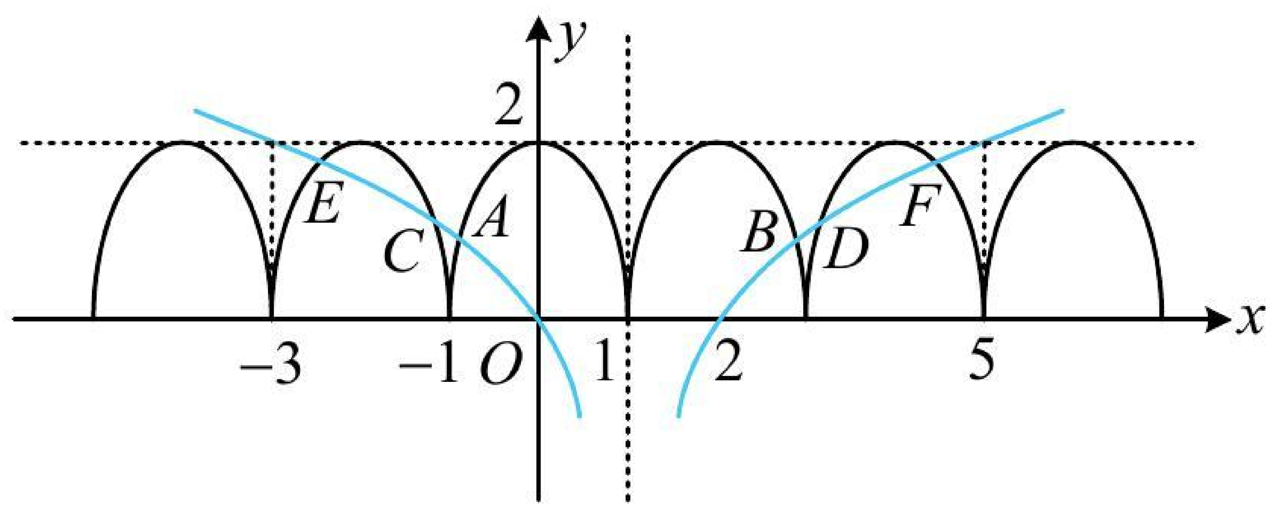
答案：B

解析：$f(x)=f(2-x)\Rightarrow f(x)$ 的图象关于 $x=1$ 对称，$f(x)$ 为偶函数 $\Rightarrow f(x)$ 的图象关于 y 轴对称，

所以 $f(x)$ 的周期为 2，$g(x)=0\Leftrightarrow f(x)=2\log_4|x-1|$，作出图象如图，由图可知两图象有 6 个交点，

且它们两两关于直线 $x=1$ 对称，由图可知 $\frac{x_A+x_B}{2}=1$，所以 $x_A+x_B=2$，同理，$x_C+x_D=x_E+x_F=2$，

故 $g(x)$ 的零点之和为 $x_A+x_B+x_C+x_D+x_E+x_F=6$.



提示：以下几题均为压轴难度.

6.（★★★★）已知 $f'(x)$ 是函数 $f(x)$ 的导函数，若 $f(x+2)$ 和 $f'(x)$ 均为奇函数，且 $f(0)=2$，则 $f(2)+f(4)+\cdots+f(2022)=$______.

答案： -2

解析： 先把已知条件翻译成 $f(x)$ 的对称性，再利用对称性求函数值，最好画个图比较容易理解，

$f(x+2)$ 为奇函数 $\Rightarrow f(x)$ 的图象关于点 $(2,0)$ 对称，所以 $f(2)=0$，

$f'(x)$ 为奇函数 $\Rightarrow f(x)$ 为偶函数，（理由见内容提要 7 的④）所以 $f(x)$ 的图象关于 y 轴对称，故 $f(x)$ 的周期为 8，

因为 $f(0)=2$，且 $f(x)$ 关于 $(2,0)$ 对称，所以 $f(4)=-2$，

又 $f(x)$ 为偶函数，且周期为 8，所以 $f(6)=f(-2)=f(2)=0$，$f(8)=f(0)=2$，

从而 $f(2)+f(4)+f(6)+f(8)=0+(-2)+0+2=0$，

故 $f(2)+f(4)+\cdots+f(2022)=[f(2)+f(4)+f(6)+f(8)]+[f(10)+f(12)+f(14)+f(16)]+\cdots$

$+[f(2010)+f(2012)+f(2014)+f(2016)]+f(2018)+f(2020)+f(2022)$

$=f(2018)+f(2020)+f(2022)=f(2)+f(4)+f(6)=-2$.

7.（2021·全国甲卷·★★★★）设函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，$f(x+1)$ 为奇函数，$f(x+2)$ 为偶函数，当 $x\in[1,2]$ 时，$f(x)=ax^2+b$. 若 $f(0)+f(3)=6$，则 $f(\frac{9}{2})=$（　　）

（A）$-\frac{9}{4}$　　（B）$-\frac{3}{2}$　　（C）$\frac{7}{4}$　　（D）$\frac{5}{2}$

答案： D

解析： $f(x+1)$ 为奇函数 $\Rightarrow f(x)$ 的图象关于点 $(1,0)$ 对称，所以 $f(1+x)=-f(1-x)$ ①，

$f(x+2)$ 为偶函数 $\Rightarrow f(x)$ 的图象关于直线 $x=2$ 对称，所以 $f(2+x)=f(2-x)$，

从而 $f(x)$ 是以 4 为周期的周期函数，所以 $f(\frac{9}{2})=f(\frac{1}{2})$，

在 $f(1+x)=-f(1-x)$ 中取 $x=\frac{1}{2}$ 可得 $f(\frac{1}{2})=-f(\frac{3}{2})$，所以 $f(\frac{9}{2})=-f(\frac{3}{2})=-\frac{9}{4}a-b$，

需求出 a 和 b 才能得出答案，给了 $[1,2]$ 上的解析式和 $f(0)+f(3)=6$，所以计算 $f(0)$ 和 $f(3)$，需转化到 $[1,2]$ 上来求，

在 $f(1+x)=-f(1-x)$ 中取 $x=1$ 可得 $f(0)=-f(2)=-4a-b$，

在 $f(2+x)=f(2-x)$ 中取 $x=1$ 得 $f(3)=f(1)=a+b$，所以 $f(0)+f(3)=-3a=6$，故 $a=-2$；

还得建立一个方程求 b，注意到 $f(x)$ 关于 $(1,0)$ 对称，所以必有 $f(1)=0$，下面给出理由，

在①中取 $x=0$ 得 $f(1)=-f(1)$，所以 $f(1)=0$，而 $f(1)=a+b$，所以 $a+b=0$，结合 $a=-2$ 可得 $b=2$，

所以 $f(\frac{9}{2})=-\frac{9}{4}a-b=\frac{5}{2}$.

8.（2022 •全国乙卷 •★★★★）已知函数 $f(x)$，$g(x)$ 的定义域均为 $\mathbf{R}$，且 $f(x)+g(2-x)=5$，$g(x)-f(x-4)=7$．若 $y=g(x)$ 的图象关于直线 $x=2$ 对称，$g(2)=4$，则 $\sum_{k=1}^{22}f(k)=$（　　）

（A）-21　　（B）-22　　（C）-23　　（D）-24

答案：D

解析：要求 $\sum_{k=1}^{22}f(k)$，得研究 $f(x)$ 的性质，先用已知的 $\begin{cases}f(x)+g(2-x)=5\\g(x)-f(x-4)=7\end{cases}$ 把 $g(x)$ 有关的消掉，

在 $g(x)-f(x-4)=7$ 中将 x 换成 $2-x$ 可得 $g(2-x)-f(-2-x)=7$，所以 $g(2-x)=f(-2-x)+7$，

代入 $f(x)+g(2-x)=5$ 可得 $f(x)+f(-2-x)+7=5$，所以 $f(x)+f(-2-x)=-2$，故 $f(x)$ 关于 $(-1,-1)$ 对称 ①，

题干给出了 $g(x)$ 关于 $x=2$ 对称，而 $g(x)$ 和 $f(x)$ 显然是有关系的，可以由此条件再推导 $f(x)$ 的对称性，

由 $g(x)-f(x-4)=7$ 可得 $f(x-4)=g(x)-7$，将 x 换成 $x+4$ 可得 $f(x)=g(x+4)-7$，

从而 $f(x)$ 可由 $g(x)$ 左移 4 个单位，下移 7 个单位得到，故 $f(x)$ 关于直线 $x=-2$ 对称 ②，

结合①②可得 $f(x)$ 是以 4 为周期的周期函数，接下来求一个周期的整点函数值，就可以算出 $\sum_{k=1}^{22}f(k)$，

首先，$f(x)$ 关于 $(-1,-1)$ 对称，所以 $f(-1)=-1$，故 $f(3)=-1$，

又 $f(x)$ 关于 $x=-2$ 对称，所以 $f(-3)=f(-1)=-1$，结合周期为 4 可得 $f(1)=f(-3)=-1$，

只要求出 $f(2)$ 和 $f(4)$，就大功告成，条件中 $g(2)=4$ 还没用，先在题干给的等式中将 $g(2)$ 构造出来，

因为 $g(2)=4$，在 $f(x)+g(2-x)=5$ 中取 $x=0$ 可得 $f(0)+g(2)=5$，所以 $f(0)=5-g(2)=1$，故 $f(4)=1$，

由 $f(0)=1$ 以及 $f(x)$ 关于 $(-1,-1)$ 对称可得 $f(-2)=-3$，结合周期为 4 可得 $f(2)=-3$，

所以 $\sum_{k=1}^{22}f(k)=5\times[f(1)+f(2)+f(3)+f(4)]+f(1)+f(2)=5\times(-1-3-1+1)-1-3=-24$.

9.（2022 • 新高考 II 卷 • ★★★★）若函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，且 $f(x+y)+f(x-y)=f(x)f(y)$，$f(1)=1$，则 $\sum_{k=1}^{22}f(k)=$（　　）

（A）-3　　（B）-2　　（C）0　　（D）1

答案：A

解法 1：本题要求 $\sum_{k=1}^{22}f(k)$，$f(x)$ 应该会有周期性，可在 $f(x+y)+f(x-y)=f(x)f(y)$ 中对 y 赋值来判断，

在 $f(x+y)+f(x-y)=f(x)f(y)$ 中令 $y=1$ 可得 $f(x+1)+f(x-1)=f(x)$ ①，

在①中将 x 换成 $x+1$ 可得 $f(x+2)+f(x)=f(x+1)$，结合式①可得 $f(x+2)+f(x)=f(x)-f(x-1)$，

所以 $f(x+2)=-f(x-1)$，从而 $f(x+3)=-f(x)$，故 $f(x+6)=-f(x+3)=f(x)$，所以 $f(x)$ 的周期为 6；

求出了周期，接下来只需计算一个周期内的整点函数值，问题就解决了，因为已知 $f(1)$，所以可以在 $f(x+y)+f(x-y)=f(x)f(y)$ 通过赋值构造出 $f(1)$ 和其它的函数值，

在 $f(x+y)+f(x-y)=f(x)f(y)$ 中令 $x=1$， $y=0$ 可得 $2f(1)=f(1)f(0)$，

又 $f(1)=1$，所以 $f(0)=2$，结合周期为 6 可得 $f(6)=2$，

令 $x=y=1$ 可得 $f(2)+f(0)=f^2(1)$，所以 $f(2)=f^2(1)-f(0)=-1$，

令 $x=2$， $y=1$ 可得 $f(3)+f(1)=f(2)f(1)$，所以 $f(3)=f(2)f(1)-f(1)=-2$，

在 $f(x+3)=-f(x)$ 中令 $x=1$ 可得 $f(4)=-f(1)=-1$，令 $x=2$ 可得 $f(5)=-f(2)=1$，

所以 $f(1)+f(2)+\cdots+f(6)=1-1-2-1+1+2=0$，故 $\sum_{k=1}^{22}f(k)=f(1)+f(2)+f(3)+f(4)=1-1-2-1=-3$.

解法 2：设 $f(x)=2\cos\frac{\pi}{3}x$，不难验证满足题干所有条件，进一步可求得 $\sum_{k=1}^{22}f(k)=-3$.

【反思】像 $f(x+a)+f(x-a)=f(x)(a\neq 0)$ 这类关系式也能推周期，可将 x 换成 $x+a$ 得到 $f(x+2a)+f(x)=f(x+a)$，再由两式消去 $f(x+a)$ 得到 $f(x+2a)=-f(x-a)$，于是 $f(x+3a)=-f(x)$，所以 $f(x+6a)=-f(x+3a)=f(x)$，故 $f(x)$ 的周期为 $6a$.